MODEL SIS (*SUSPECTIBLE, INFECTIVES, SUSPECTIBLE*) DENGAN PERTUMBUHAN ALAMI DAN PROSES MIGRASI

TUGAS AKHIR

Disusun sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

<u>HELVI AGUSTIANTI UMBARI</u>
10754000267

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2012

MODEL SIS (*SUSPECTIBLE, INFECTIVES, SUSPECTIBLE*) DENGAN PERTUMBUHAN ALAMI DAN PROSES MIGRASI

HELVI AGUSTIANTI UMBARI
10754000267

TanggalSidang : 26 Januari 2012
PeriodeWisuda : Februari 2012

JurusanMatematika
FakultasSainsdanTeknologi
Universitas Islam Negeri Sultan SyarifKasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

TugasAkhirinimembahaspenyebaranpenyakitmodel SIS. Pada model inidiasumsikanterjadikelahirandankematianalamidalampopulasidanjugaterjadi proses migrasi. Hasil yang diperolehyaitujika$b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ dan jika $\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} < \rho_1 + \rho_2 + \mu + \gamma$, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik, sebaliknya jika $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$danjika$\beta + \rho_1 > \rho_2 + \mu + \gamma$ titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik.

Kata Kunci: Model SIS, TitikKesetimbangan, StabilAsimtotik.

SIS (SUSPECTIBLE, INFECTIVES, SUSPECTIBLE) MODEL WITH NATURALY GROWTH AND MIGRATION PROCCESSES

HELVI AGUSTIANTI UMBARI
10754000267

Date of Final Exam : 26 Januari 2012

Graduation Ceremony Period :Februari 2012

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan SyarifKasim Riau
JL. HR. Soebrantas no. 155 Pekanbaru

ABSTRACK

This thessisdiscussesabout mathematical modelingtomodel thespread ofinfectiousdiseasesSISmodel. In this modelthe birthanddeathis assumedoccurnaturallyin the populationandmigrationprocesses occur also. The result obtained that is if $b+\rho_1<\rho_2+\mu$ *and* $\beta\frac{b}{(\mu-\rho_1+\rho_2)}<-\rho_1+\rho_2+\mu+\gamma$ *disease-free equilibrium is asymptotic stable, otherwise if* $b+\rho_1<\rho_2+\mu$ *and* $\beta+\rho_1>\rho_2+\mu+\gamma$ *endemic equilibrium is stable asymptotic.*

***Key word** : SIS Model, Equilibrium Point, Asymptotic Stable.*

....DAF TAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyebaran berbagai jenis penyakit menular telah menjadi perhatian yang luas dari masyarakat karena telah banyak mengakibatkan kematian dan kerugian. Masalah ini akan semakin berdampak buruk jika tidak segera di atasi dengan baik. Salah satu cara untuk mengatasi masalah penyebaran penyakit menular ini dapat menggunakan penerapan ilmu matematika dengan metode pemodelan matematika.

Pemodelan matematika merupakan salah satu terapan dari ilmu matematika yang dapat memodelkan berbagai penyebaran penyakit menular, baik yang menyebabkan kematian (fatal) dan yang tidak menyebabkan kematian (tidak fatal). Salah satu terapan model matematika tersebut yaitu dapat menganalisa perkembangan penyakit menular melalui model matematika.

Model penyebaran penyakit pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 yaitu model SIR (*suspectible, infectives, recovered*). Model SIR adalah model penyebaran penyakit yang membagi populasi menjadi tiga kelas yaitu kelas *susceptible*, kelas yang berisi individu-individu rentan terhadap penyakit yang dibicarakan, kelas *infectives* adalah kelas yang didalamnya terdapat individu yang telah terinfeksi penyakit dan mampu menularkan penyakit yang dibicarakan, dan kelas *recovered* adalah kelas yang telah sembuh dari sakit dan telah mengalami kekebalan tubuh terhadap penyakit. Model SIR dapat berubah jika terjadi perubahan pada asumsi – asumsi, yaitu di antaranya menjadi model SEIR (*suspectible, exposed, infectives, recovered*), model SIAR (*suspectible, infectives, aids, recovered),* SIS (*suspectible, infectives, suspectible*), dan IA (*infectives, aids*).

Model SIS adalah model yang mengasumsikan individu yang telah sembuh tidak mengalami kekebalan atau masih dapat tertular penyakit kembali atau masuk ke kelas *susceptible*. Contoh penyakit yang dapat diterapkan dengan model SIS ini di antaranya yaitu influenza, tuberculosis, dan malaria.

Beberapa penelitian tentang model penyebaran penyakit di antanya adalah jurnal matematika yang berjudul *Model SIR Penyakit Tidak Fatal* (Tamrin, H, 2007) yang membahas penyebaran penyakit tidak fatal menggunakan model SIR dengan kesimpulan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika $\beta < \alpha + \mu$, dan titik kesetimbangan endemic penyakit stabil asimtotik jika $\beta > \alpha + \mu$, penelitian penyebaran penyakit dengan judul *analisis kestabilan titik tetap pada model SIS dengan penambahan populasi rentan konstan dan penambahan kematian sesuai persamaan logistik* (Ferawati, 2004) yang membahas model SIS dengan asumsi adanya kelahiran pada kelas *suspectible* dan asumsi adanya faktor penurunan reproduksi, dan penelitian dengan judul *Pembuatan model matematika dengan software untuk penghitung tingkat vaksinasi pada penyebaran penyakit menular* (Supriatna, A. K, 2005) yang membahas model penyebaran penyakit dengan model SIR dan SIS dengan hasil diperoleh tingkat vaksinasi untuk beberapa keadaan.

Dengan adanya penyebaran beberapa penyakit menular sebagaimana yang telah diuraikan di atas, maka penulis tertarik untuk meneliti tentang model SIS dengan menambahkan beberapa asumsi seperti adanya pertumbuhan alami individu yang dapat mempengaruhi penyebaran penyakit dalam suatu populasi, selain itu peneliti juga menambahkan asumsi adanya migrasi.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penyelesaian tugas akhir ini adalah "Menentukan model penyebaran penyakit menular menggunakan model SIS dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi".

1.3 Batasan Masalah

Agar penulisan ini menjadi lebih terarah, permasalahan ini hanya dibatasi pada pembahasan mengenai model matematika untuk penyebaran penyakit menular dengan menggunakan model SIS dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini yaitu dapat menganalisa perkembangan penyakit menular melalui model penyebaran penyakit yaitu model SIS dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang digunakan, seperti persamaan diferensial, titik kesetimbangan (*equilibrium*) dan kestabilan titik kesetimbangan.

Bab III Metodologi

Bab ini berisikan langkah-langkah yang penulis gunakan untuk menyelesaikan model SIS dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi.

Bab IV Pembahasan.

Bab ini berisikan pembahasan mengenai model matematika untuk memodelkan penyebaran penyakit menular dengan menggunakan model SIS dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1. Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Di bawah ini diberikan sistem persamaan diferensial yang linear dan nonlinear.

Didefinisikan :

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f_i adalah fungsi kontinu pada E, dengan $i = 1,2, \dots, n$.

Diberikan sistem persamaan diferensial autonomous :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

Sistem (2.1) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2 \dots x_n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sistem (2.2) dikatakan linear jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ masing – masing linear dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$. Sebaliknya disebut sistem persamaan diferensial nonlinear.

Jika Sistem (2.2) linear, maka Sistem (2.2) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x_n} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Selanjutnya Sistem (2.3) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\dot{x} = Ax,$$

dengan A matriks ukuran $n \times n$, dan $x \in E$.

Solusi Sistem (2.1) diberikan oleh definisi 1 di bawah ini :

Definisi 2.1 (Perko, 1991) Diberikan $E \subseteq R^n$, E himpunan terbuka, dan $f_i \in C(E, R)$, $i = 1,2, \ldots, n$. Vektor $x(t) \in R^n$ disebut penyelesaian Sistem (2.1) pada interval I jika $x(t)$ diferensiabel pada I dan $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$ untuk setiap $t \in I$ dan $x(t) \in E$.

2.2. Titik Kesetimbangan (*Equilibrium*)

Suatu sistem dinamik dikatakan setimbang jika sistem tidak berubah sepanjang waktu. Secara formal titik kesetimbangan (*equilibrium*) dari Sistem (2.1) didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.2 (Meiss, 2007) Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik *equilibrium*) Sistem (2.1) jika $f(\bar{x}) = 0$.

Secara umum, model penyebaran penyakit biasanya mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada individu yang terinfeksi penyakit.

2.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Konsep perilaku sistem pada titik kesetimbangan (*equilibrium*) dikenal sebagai kestabilan titik kesetimbangan. Kestabilan tersebut merupakan informasi untuk menggambarkan perilaku sistem. Di bawah ini definisi formal mengenai kestabilan titik kesetimbangan :

Definisi 2.3 (Hale, 1991) Titik kesetimbangan (*equilibrium*) $\bar{x} \in R^n$ dari Sistem (2.1) dikatakan :

a) Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi Sistem (2.1) $x(t)$ yang memenuhi $\|(xt_0) - \bar{x}\| < \delta$ maka berakibat $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
b) Stabil asimtotik lokal jika titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ maka berakibat $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$.
c) Tidak stabil jika titik e*quilibrium* $\bar{x} \in R^n$ tak memenuhi *(a).*

Jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil global. Sementara itu jika untuk sembarang titik awal, solusi Sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ dan untuk t membesar menuju tak hingga $x(t)$ konvergen ke $\bar{x} \in R^n$, maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil asimtotik global.

Sifat kestabilan titik *equilibrium* Sistem (2.1) dapat didekati dengan menggunakan metode linearisasi. Metode ini digunakan untuk mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Sebelum penyelesaian dengan metode linearisasi, perlu ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobian di titik $\bar{x}$. Di bawah ini diberikan definisi matriks Jacobian di titik $\bar{x}$.

Definisi 2.4 (Hale, 1991) Diberikan $f = (f_1, \dots, f_n)$ pada Sistem (2.1) di atas dengan $f_i \in c^1(E), i = 1,2, \dots, n$.

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix},$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik $\bar{x}$.

Setelah ditentukan matriks Jacobian, maka penyelesaian dengan metode linearisasi dapat dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Berikut definisi mengenai metode linearisasi :

Definisi 2.5 (Meiss, 2007) Sistem $\dot{x} = J\big(f(\bar{x})\big)\, x$ disebut linearisasi Sistem (2.1) di $(\bar{x})$.

Dengan menggunakan matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$, sifat kestabilan titik *equilibrium* $\bar{x}$ dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik hiperbolik.

Definisi 2.6 (Meiss, 2007) Titik equilibrium $\bar{x}$ disebut titik equilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real tak nol.

Kestabilan dari titk *equilibrium* pada Sistem (2.1) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakterisrik dari matriks Jacobian di titik $\bar{x}$. Kriteria kestabilan titik *equilibrium* pada Sistem (2.1) tersebut disajikan pada teorema dibawah ini :

Teorema 2.1 (Hale, 1991)

a) Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari Sistem (2.1) stabil asimtotik.
b) Jika terdapat nilai eigen dari matriks $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real positif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari Sistem (2.1) tidak stabil.

Di bawah ini akan diberikan beberapa contoh mengenai kestabilan titik kesetimbangan untuk sistem linear dua variabel terikat.

Pandang Sistem linear :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

dengan a, b, c dan d konstan. Misalkan λ nilai eigen dari Matriks A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{2.5}$$

Berdasarkan persamaan (2.5) di atas, diperoleh

$$\lambda_{1.2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2},$$

atau

$$\lambda_{1.2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

dengan $p = a + d$ dan $q = ad - bc$.

Stabilitas Sistem linier (2.1) dapat diterangkan sebagai berikut:

1). $\lambda_{1.2}$ real dan berbeda jika $\Delta = p^2 - 4q > 0$

a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda jika $q > 0$:

- $\lambda_{1.2}$ semua positif jika $p > 0$ → tidak stabil.
- $\lambda_{1.2}$ semua negatif jika $p < 0$ → stabil.

b. $\lambda_{1.2}$ beda tanda jika $q < 0$ → tidak stabil.

c. Salah satu dari $\lambda_{1.2}$ nol, jika $q = 0$.

- Akar lainnya positif jika $p > 0$ → tidak stabil.
- Akar lainnya negatif jika $p < 0$ → stabil netral.

2). $\lambda_{1.2}$ real dan sama jika $\Delta = 0$.

a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda :

- Keduanya positif jika $p > 0$ → tidak stabil.
- Keduanya negatif jika $p < 0$ → stabil.

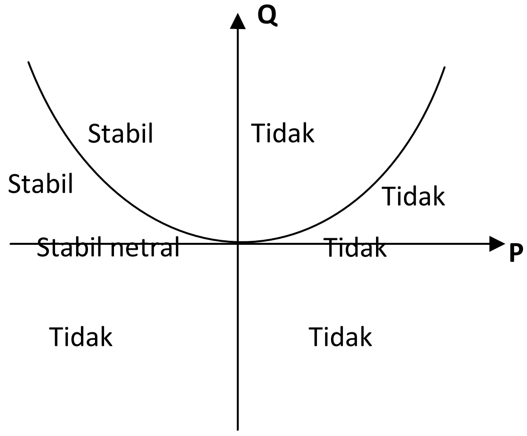
b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, bila $p > 0$ → tidak stabil.

3). $\lambda_{1.2}$ kompleks bila $\Delta < 0$.

a. Re $\lambda_{1.2}$ sama tanda :

- Re $\lambda_{1.2}$ semua positif bila $p > 0$ → tidak stabil.
- Re $\lambda_{1.2}$ semua negatif bila $p < 0$ → stabil.

b. Re $\lambda_{1.2}$ bila $p = 0$ → stabil netral



Gambar 2.1. Bidang fase Sistem linier

2.4. Pemodelan Matematika

Menurut Meyer, pemodelan matematika merupakan suatu alat yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan permasalahan-permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk matematis. Dengan pemodelan matematika, permasalahan-permasalahan tersebut diharapkan menjadi lebih mudah untuk diselesaikan.

Model SIR, SEIR, SIAR, dan model SIS merupakan beberapa model matematika untuk memodelkan penyebaran penyakit. Dari model-model tersebut dapat dibuat beberapa persamaan yang dapat menggambarkan kondisi dari suatu penyebaran penyakit, dan akan ditentukan titik kesetimbangan serta kestabilan dari titik kesetimbangan suatu model penyebaran penyakit.

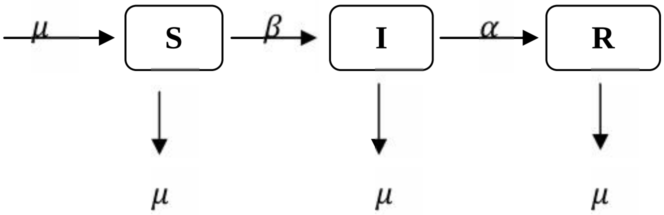
Model SIR adalah model matematika untuk memodelkan penyebaran penyakit dengan membagi populasi menjadi tiga kelas yaitu *suspectible* atau kelas yang berisi individu rentan terhadap penyakit yang dibicarakan, kelas *infectives* atau kelas yang berisi individu yang telah terinfeksi penyakit dan bisa menularkan penyakit yang sedang dibicarakan, dan *recovered* adalah kelas yang berisi individu yang telah sembuh dari penyakit yang dibicarakan dan telah mengalami kekebalan sehingga tidak dapat tertular penyakit kembali.

Di bawah ini akan diberikan contoh model SIR dengan kelahiran dan kematian yang berarti bahwa dalam populasi terjadi proses kelahiran dan kematian, dengan laju kelahiran sama dengan laju kematian. Pada model ini diasumsikan bahwa individu yang lahir masuk ke kelas *suspectible* dan jumlah populasi konstan dengan S adalah proporsi individu *suspectible*, I adalah proporsi individu *infectives*, dan R adalah proporsi individu *recovered* sehingga $S + I + R = 1$.

Pada model ini diasumsikan :

- Populasi tertutup (tidak ada proses migrasi).
- Individu yang sembuh mempunyai kekebalan tubuh.
- Dalam populasi terjadi proses kelahiran dan kematian dengan laju kelahiran dan kematian sama dan dinyatakan dengan $\mu > 0$.
- Laju penularan penyakit dari *susceptible* menjadi *infectives* adalah konstan, dan dinyatakan dengan $\beta > 0$.
- Laju kesembuhan penyakit dari *Infectives* menjadi *recovered* adalah konstan, dan dinyatakan dengan $\alpha > 0$.

Berdasarkan asumsi-asumsi diatas maka didapat diagram alir model SIR seperti gambar di bawah ini :



Gambar 2.1 Model SIR dengan kelahiran dan kematian.

Berdasarkan model pada gambar 2.1 di atas, maka didapat Sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu - \mu S \quad (2.6.a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I - \mu I \quad (2.6.b)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R \quad (2.6.c)$$

dengan $S + I + R = N$, yang berarti jumlah populasi merupakan jumlah kelas *suspectible*, *invectives*, dan kelas *recovered*.

Solusi Sistem (2.6) adalah himpunan $\Gamma_1 = \{(S, I, R) \ |S + I + R = 1 \ dan \ S, I, R \geq 0\}$. Karena $R = 1 - I - S$, dan R bisa dicari setelah S dan I ditentukan, maka untuk sementara persamaan (2.6.c) diabaikan, sehingga Sistem (2.6) dirubah menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu - \mu S \tag{2.7.a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I - \mu I \tag{2.7.b}$$

dengan $S + I \leq 1$.

Solusi Sistem (2.7) adalah himpunan $\Gamma_2 = \{(S, I) | S + I \leq 1 \ dan \ S, I \geq 0\}$. Setelah diperoleh sistem persamasn diferensial dari model di atas, maka akan ditentukan titik kesetimbangan (*equilibrium*). Titik kesetimbangan tersebut akan dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit.

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang sakit, sehingga $I = 0$.

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan Sistem (2.7), maka persamaan (2.7.a) dan persamaan (2.7.b) diberi nilai nol atau sama dengan nol, sehingga Sistem (2.7) menjadi :

$$\begin{aligned} -\beta SI + \mu - \mu S &= 0 \\ \beta SI - \alpha I - \mu I &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Kemudian untuk mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit maka dilakukan penyelesaian di bawah ini :

$$\begin{aligned} -\beta S(0) + \mu - \mu S &= 0 \\ \mu - \mu S &= 0 \\ \mu(1 - S) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh S untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan S^*, yaitu $S^* = 1$.

Dari penyelesaian di atas maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = (0,1)$.

2. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Suatu populasi mempunyai titik kesetimbangan endemik penyakit artinya didalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit yang sedang dibicarakan atau $I > 0$. Dari persamaan kedua pada Sistem (2.8) di atas, maka :

$$\beta SI - \alpha I - \mu I = 0$$

$$I(\beta S - \alpha - \mu) = 0$$

Oleh Karena $I > 0$, maka :

$$\beta S = \alpha + \mu$$

Sehingga diperoleh S untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = \frac{\alpha+\mu}{\beta}$.

Selanjutnya substitusikan $\hat{S}$ ke dalam persamaan pertama pada Sistem (2.8) di atas, sehingga :

$$-\beta SI + \mu - \mu S = 0$$

$$-\beta\left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)I = \mu - \mu\left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)$$

$$(\alpha + \mu)I = \mu - \mu\left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)$$

$$I = \frac{\mu - \mu\left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)}{(\alpha+\mu)}$$

$$= \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu\left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)}{(\alpha+\mu)}$$

$$= \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}$$

Sehingga diperoleh I untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I}$, yaitu $\hat{I} = \frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}$.

Berdasarkan penyelesian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I},\hat{S}) = \left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)$.

Setelah diperoleh titik kesetimbangan, maka akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan tersebut. Kestabilan titik kesetimbangan pada contoh model SIR di atas dapat dilihat pada uraian di bawah ini :

Misalkan

$$f_1(I,S) = -\beta SI + \mu - \mu S$$

$$f_2(I,S) = \beta SI - \alpha I - \mu I$$

Selanjutnya masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut, seperti di bwah ini :

a. Fungsi $f_1(I,S)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f_1(I,S)}{\partial S} = \frac{\partial(-\beta SI+\mu-\mu S)}{\partial S} = -\beta I - \mu$$

b. Fungsi $f_1(I,S)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f_1(I,S)}{\partial I} = \frac{\partial(-\beta SI+\mu-\mu S)}{\partial I} = -\beta S$$

c. Fungsi $f_2(I,S)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f_2(I,S)}{\partial S} = \frac{\partial(\beta SI-\alpha I-\mu I)}{\partial S} = \beta I$$

d. Fungsi $f_2(I,S)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f_2(I,S)}{\partial I} = \frac{\partial(\beta SI-\alpha I-\mu I)}{\partial I} = \beta S - \alpha - \mu$$

- Titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*,S^*) = (0,1)$.

  Teorema 2.2 (Husni Tamrin, 2007) Jika $\beta < \alpha + \mu$, maka titik kesetimbangan bebas pnyakit $(I^*,S^*) = (0,1)$ stabil asimtotik.

  Bukti :

  Dari penurunan parsial pada f_1 dan f_2 di atas, maka didapatkan matriks Jacobian :

$$Jf(I,S) = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

Karena titik kesetimbangan $(I^*, S^*) = (0,1)$, maka matriks Jacobian $Jf(I,S)$ berubah menjadi :

$$Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari det $\left(\lambda I - Jf(I^*, S^*)\right) = 0$, untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian.

$$\left(\lambda I - Jf(I^*, S^*)\right) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \beta \\ 0 & \lambda - [\beta - \alpha - \mu] \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari det $\left(\lambda I - Jf(I^*, S^*)\right) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda + \mu & \beta \\ 0 & \lambda - [\beta - \alpha - \mu] \end{bmatrix}\right) = 0$$

Berdasarkan determinan matriks di atas maka diperoleh persamaan karakteristiknya yaitu :

$$(\lambda + \mu)(\lambda - \beta + \alpha + \mu) = 0$$

Diperoleh $\lambda_1 = -\mu$ dan $\lambda_2 = \beta - \alpha - \mu$. Jelas bahwa $\lambda_1 = -\mu < 0$ dan diperoleh bahwa nilai $\lambda_2 = \beta - \alpha - \mu < 0 \Leftrightarrow \beta < \alpha + \mu$. Sehingga terbukti bahwa jika $\beta < \alpha + \mu$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit $(I,S) = (0,1)$ stabil asimtotik.

Berdasarkan penyelesaian di atas diperoleh bahwa jika laju penularan penyakit lebih sedikit dari laju kesembuhan penyakit ditambah laju kelahiran maka titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = (0,1)$ stabil asimtotik, sehingga dalam jangka waktu yang lama tidak ada penyakit dalam populasi.

- Titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)$.

  Teorema 2.3 (Husni Tamrin, 2007) Titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)$ stabil asimtotik jika $\beta > \alpha + \mu$.

  Bukti :

Sama seperti penyelesaian pada titik kesetimbangan bebas penyakit, maka akan ditentukan matriks Jacobian dari penurunan parsial pada f_1 dan f_2 di atas.

$$Jf(I,S) = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

Oleh Karena titik endemik penyakit $(\hat{I},\hat{S}) = \left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)$, maka matrik di atas berubah menjadi :

$$Jf(\hat{I},\hat{S}) = \begin{bmatrix} -\beta\left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}\right) - \mu & -\alpha - \mu \\ \beta\left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-\beta\mu}{\alpha+\mu} & -\alpha - \mu \\ \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} - \mu & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian dicari det $\left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right) = 0$

$$\left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-\beta\mu}{\alpha+\mu} & -\alpha - \mu \\ \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} - \mu & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda + \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} & \alpha + \mu \\ -\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} + \mu & \lambda \end{bmatrix}$$

det $\left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right) = 0$, berarti

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} & \alpha + \mu \\ -\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} + \mu & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik :

$$(\lambda^2 + \frac{\beta\mu}{\alpha+\mu}\lambda + \mu(\beta - \alpha - \mu) = 0$$

nilai eigen pada persamaan karakteristik tersebut dapat dihitung :

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu}\right)^2 - 4\mu(\beta-\alpha-\mu)}}{2}$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta\mu}{\alpha+\mu}\right)^2 - 4\mu(\beta-\alpha-\mu)}}{2}$$

- Untuk λ_1 : bagian real dari $\lambda_1 < 0$ atau $-\frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)} < 0$, karena $\beta > \alpha + \mu$ maka $\beta - \alpha - \mu > 0$ sehingga $4\mu(\beta - \alpha - \mu) > 0$, sehingga $\lambda_1 < 0$.
- Untuk λ_2 : bagian real dari $\lambda_2 < 0$ atau $-\frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)} < 0$,karena $\beta > \alpha + \mu$ maka $\beta - \alpha - \mu > 0$ sehingga $4\mu(\beta - \alpha - \mu) > 0$, sehingga $\lambda_2 < 0$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu)} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)$ stabil asimtotik jika $\beta > \alpha + \mu$, yang artinya bahwa dalam populasi selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit jika laju penularan lebih besar dari laju kesembuhan ditambah laju kematian.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Adapun metodologi atau langkah-langkah dalam penulisan tugas akhir ini yaitu :

1) Studi literatur atau mempelajari literatur yang berhubungan dengan pemodelan matematika.
2) Menentukan rumusan masalah yang akan dibahas.
3) Membuat asumsi-asumsi dalam model matematika.

   Pada penulisan tugas akhir ini dibuat beberapa asumsi diantaranya yaitu adanya pertumbuhan alami yang mencakup kelahiran dan kematian, dan adanya proses migrasi.
4) Membuat model matematika.

   Model matematika dalam tugas akhir ini yaitu model SIS yang sesuai dengan asumsi-asumsi yang telah dibuat.
5) Menentukan titik kesetimbangan.

   Berdasarkan model matematika yang telah dibuat,dapat ditentukan titik kesetimbangan (equilibrium), baik titik kesetimbangan bebas penyakit maupun titik kesetimbangan endemik penyakit.
6) Menganalisa kestabilan dari titik kesetimbangan yang telah ditentukan.

   Setelah ditentukan titik kesetimbangan, maka harus diselidiki kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut.
7) Menyimpulkan hasil dari analisa kestabilan titik kesetimbangan.

BAB IV
PEMBAHASAN DAN HASIL

Pemodelan matematika merupakan salah satu terapan dari ilmu matematika yang dapat mendeskripsikan beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk yang matematis, dengan tujuan untuk lebih mempermudah menyelesaikan suatu permasalahan tersebut.

Pemodelan matematika juga dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit dalam populasi. Pada bab ini dibahas mengenai model SIS yang merupakan model penyebaran penyakit untuk beberapa penyakit yang jika individu terinfeksi yang telah sembuh dari penyakit tidak mengalami kekebalan tubuh atau dapat tertular penyakit kembali. Pada model ini, populasi dibagi menjadi dua kelas yaitu kelas *suspectible* atau kelas yang berisi individu-individu rentan terhadap penyakit, dan kelas *infectives* atau kelas yang berisi individu-individu terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakit.

Jika $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat *t*, $S(t)$ jumlah individu yang *suspect* pada saat *t*, dan $I(t)$ menyatakan jumlah individu terinfeksi pada saat *t*, maka $N(t) = S(t) + I(t)$.

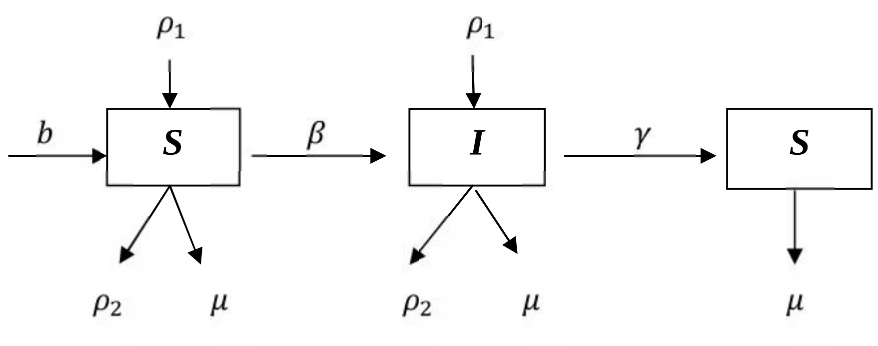
4.1 Asumsi-asumsi dalam Model

Untuk model SIS ini, asumsi atau catatan-catatan yang diberikan diantaranya sebagai berikut :

a) Adanya proses kelahiran dan kematian alami dalam populasi dengan laju kelahiran konstan $b > 0$ dan laju kematian konstan $\mu > 0$.
b) Dalam populasi terjadi proses migrasi, dengan laju imigrasi besarnya konstan $\rho_1 > 0$, dan laju emigrasi besarnya konstan $\rho_2 > 0$.
c) Laju penularan penyakit dari *suspectible* menjadi *infectives* adalah konstan dan dinyatakan dengan $\beta > 0$.
d) Laju kesembuhan penyakit dari *infectives* menjadi *suspectible* kembali adalah konstan dan dinytakan dengan $\gamma > 0$.

4.2 Model SIS dengan Pertumbuhan Alami dan Proses Migrasi

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas maka diperoleh diagram alir model SIS pada gambar di bawah ini :



Gambar 4.1 Model SIS dengan Pertumbuhan Alami dan Proses Migrasi.

Berdasarkan diagram alir di atas, diperoleh sistem persamaan diferensial yaitu :

$$\frac{dS}{dt} = bN + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S - \mu S + \gamma I$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \mu I - \gamma I \qquad (4.1)$$

dengan $S + I = N$ merupakan jumlah populasi keseluruhan.

Oleh Karena $N = S + I$ maka $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt}$, sehingga :

$$\frac{dN}{dt} = bN + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S - \mu S + \gamma I + \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \mu I - \gamma I$$

Bentuk di atas dapat disederhanakan menjadi :

$$\frac{dN}{dt} = bN + (\rho_{1-}\rho_2)S - \beta \frac{S}{N} I - \mu S + \gamma I + \beta \frac{S}{N} I + (\rho_1 - \rho_2)I - \mu I - \gamma I$$

$$= bN + (\rho_1 - \rho_2)(S + I) - \mu(S + I)$$

$$= bN + (\rho_1 - \rho_2)N - \mu N$$

$$= (b - \mu + \rho_1 - \rho_2)N$$

Pada model ini populasi diasumsikan tidak tertutup dan tidak konstan, untuk mengetahui kondisi populasi dalam model ini, maka akan dicari solusi dari $\frac{dN}{dt}$ di atas :

$$\frac{dN}{dt} = (b - \mu + \rho_1 - \rho_2)N$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int (b - \mu + \rho_1 - \rho_2)\, dt$$

$$\ln N = (b - \mu + \rho_1 - \rho_2)t + C$$

$$N(t) = e^{(b-\mu+\rho_1-\rho_2)t+C}$$

$$= e^{(b-\mu+\rho_1-\rho_2)t+C}$$

Sehingga jika misalkan nilai awal $t = 0$ dan $N(0) = N_0$ maka bentuk di atas menjadi :

$$N(0) = e^0 e^C$$

$$N(0) = e^C$$

Bentuk persamaan awalnya akan berubah menjadi :

$$N = e^C\left(e^{(b-\mu+\rho_1-\rho_2)t}\right)$$

Karena $N(0) = N_0$, maka :

$$N = N_0\left(e^{(b-\mu+\rho_1-\rho_2)t}\right).$$

Bentuk di atas merupakan gambaran populasi dalam waktu t, sehingga terdapat beberapa kemungkinan dalam populasi, yaitu :

a) Jika $\rho_1 = \rho_2$ dan $b = \mu$ maka $\lim_{t\to\infty} N(t) = N_0$ atau populasi tetap.
b) Jika $\rho_1 > \rho_2$ dan $b > \mu$ maka $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ atau populasi meningkat.
c) Jika $\rho_1 < \rho_2$ dan $b < \mu$ maka $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$ atau populasi menurun.

Selanjutnya dari Sistem (4.1) akan dicari titik kesetimbangannya, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit.

4.3 Titik Kesetimbangan (*Equilibrium*)

Titik kesetimbangan dari Sistem (4.1) dapat ditentukan dalam dua keadaan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit artinya tidak ada individu yang terserang penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit yang artinya selalu ada individu yang terserang penyakit dalam populasi.

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan Sistem (4.1), maka masing-masing persamaan pada Sistem (4.1) diberi nilai nol, sehingga Sistem (4.1) menjadi :

$$bN + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S - \mu S + \gamma I = 0$$

$$\beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \mu I - \gamma I = 0 \tag{4.2}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang terserang penyakit atau $I = 0$, maka dari Persamaan pertama pada Sistem (4.2) dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan S pada titik kesetimbangan bebas penyakit :

$$bN + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S - \mu S + \gamma I = 0$$

$$bN + \rho_1 S - \rho_2 S - \mu S = 0$$

$$bN - (\mu - \rho_1 + \rho_2)S = 0$$

$$(\mu - \rho_1 + \rho_2)S = bN$$

Sehingga diperoleh S untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan S^*, yaitu $S^* = \frac{bN}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)}$ dengan syarat $(\mu > \rho_1 - \rho_2)$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = \left(0, \frac{bN}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)}\right)$ dengan syarat $\mu > \rho_1 - \rho_2$.

2. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada penyakit dalam populasi atau $I > 0$, dari persamaan kedua pada Sistem (4.2) maka :

$$\beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \mu I - \gamma I = 0$$

$$(\beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma)I = 0$$

$$\left(\beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma\right) = 0$$

$$\beta \frac{S}{N} = -\rho_1 + \rho_2 + \mu + \gamma$$

Sehingga diperoleh S untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = \frac{-\rho_1+\rho_2+\mu+\gamma}{\beta} N$.

Oleh Karena $S + I = N$ maka I dapat dicari setelah S diketahui, untuk mendapatkan I penyelesaiannya dapat dilihat pada uraian di bawah ini :

$$S + I = N$$

$$I = N - S$$

$$I = N - \left(\frac{-\rho_1+\rho_2+\mu+\gamma}{\beta} N\right)$$

Sehingga diperoleh I untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I}$, yaitu $\hat{I} = \frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\mu-\gamma}{\beta} N$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\mu-\gamma}{\beta} N, \frac{-\rho_1+\rho_2+\mu+\gamma}{\beta} N\right)$.

4.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan (*equilibrium*)

Setelah diperoleh titik kesetimbangan dari Sistem (4.1), maka akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut. Untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut dapat dilihat uraian di bawah ini :

Misalkan :

$$f(I,S) = bN + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S - \mu S + \gamma I$$

$$g(I,S) = \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \mu I - \gamma I$$

Kemudian masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut, seperti di bawah ini :

- Fungsi $f(I,S)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial\left(b(S+I)+\rho_1 S-\beta\frac{S}{N}I-\rho_2 S-\mu S+\gamma I\right)}{\partial S} = b + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \beta\frac{I}{N}$$

- Fungsi $f(I,S)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{\partial(b(S+I)+\rho_1 S-\beta\frac{S}{N}I-\rho_2 S-\mu S+\gamma I)}{\partial I} = = b - \beta\frac{S}{N} + \gamma$$

- Fungsi $g(I,S)$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{\partial(\beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \mu I - \gamma I)}{\partial S} = \beta \frac{I}{N}$$

- Fungsi $g(I, S)$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial g}{\partial I} = \frac{\partial(\beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \mu I - \gamma I)}{\partial I} = \beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma$$

Selanjutnya akan dicari matrik Jacobian dari beberapa persamaan parsial di atas, sehingga :

$$Jf(I, S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix}$$

Setelah masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabelnya, maka matriks $Jf(I, S)$ di atas menjadi :

$$Jf(I, S) = \begin{bmatrix} b + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \beta \frac{I}{N} & b - \beta \frac{S}{N} + \gamma \\ \beta \frac{I}{N} & \beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma \end{bmatrix}$$

1) Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, $(I^*, S^*) = (0, \frac{bN}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)})$.

Teorema 4.1 : titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = (0, \frac{bN}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)})$ stabil asimtotik jika $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ dan $\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} < -\rho_1 + \rho_2 + \mu + \gamma$.

Bukti :

Berdasarkan matriks Jcobian $Jf(I, S)$ di atas maka matriks $Jf\big((I^*, S^*)\big)$ menjadi :

$$Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} b + \rho_1 - \rho_2 - \mu & b - \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \gamma \\ 0 & \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari determinan $\big(\lambda I - Jf((I^*, S^*)\big) = 0$ untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian.

Misal matriks $M_1 = (\lambda I - Jf(I^*, S^*)$

$$M_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b + \rho_1 - \rho_2 - \mu & b - \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \gamma \\ 0 & \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma \end{bmatrix}$$

$$|M_1| = \begin{bmatrix} \lambda - [b + \rho_1 - \rho_2 - \mu] & -b + \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} - \gamma \\ 0 & \lambda - \left[\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma\right] \end{bmatrix}$$

Determinan M_1 di atas memperoleh persamaan karakteristik :

$$(\lambda - [b + \rho_1 - \rho_2 - \mu]) \left(\lambda - \left[\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma\right]\right) = 0,$$

sehingga nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas :

$\lambda_1 = b + \rho_1 - \rho_2 - \mu$, dan $\lambda_2 = \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, dapat dilihat bahwa $\lambda_1 = b + \rho_1 - \rho_2 - \mu < 0 \Leftrightarrow b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ dan $\lambda_2 = \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma < 0 \Leftrightarrow \beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} < -\rho_1 + \rho_2 + \mu + \gamma$.

Sehingga berdasarkan teorema 4.1 di atas, maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = \left(0, \frac{bN}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)}\right)$ stabil asimtotik jika $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ dan $\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + \mu + \gamma$, yang berarti bahwa untuk t menuju tak hingga tidak ada penyakit dalam populasi jika laju kelahiran ditambah dengan imigrasi lebih kecil dari emigrasi dan kematian, dan juga jika dalam populasi besar laju penularan dikali dengan laju kelahiran dibagi dengan laju kematian dikurangi dengan laju imigrasi serta ditambah dengan laju emigrasi lebih kecil dari laju emigrasi dikurangi dengan laju imigrasi ditambah dengan laju kematian dan ditambah dengan laju kesembuhan.

2) Kesetimbangan titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I},\hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\mu-\gamma}{\beta}N, \frac{-\rho_1+\rho_2+\mu+\gamma}{\beta}N\right)$.

Teorema 4.2 : Titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I},\hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\mu-\gamma}{\beta}N, \frac{-\rho_1+\rho_2+\mu+\gamma}{\beta}N\right)$ stabil asimotik $b+\rho_1 < \rho_2+\mu$ dan jika $\beta+\rho_1 > \rho_2+\mu+\gamma$.

Bukti :

Sama seperti penyelesaian pada titik kesetimbangan bebas penyakit di atas, maka kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit dapat diselidiki melalui uraian di bawah ini :

Berdasarkan matriks Jacobian $Jf(I,S)$ di atas, maka matriks Jacobian titik kesetimbangan endemik penyakit $Jf(\hat{I},\hat{S})$:

$$Jf(\hat{I},\hat{S}) = \begin{bmatrix} b+\rho_1-\rho_2-\mu-\beta\frac{I}{N} & b-\beta\frac{S}{N}+\gamma \\ \beta\frac{I}{N} & \beta\frac{S}{N}+\rho_1-\rho_2-\mu-\gamma \end{bmatrix}$$

Setelah dimasukkan nilai $\hat{I}$ dan $\hat{S}$ maka matriks di atas menjadi :

$$Jf(\hat{I},\hat{S}) = \begin{bmatrix} b-\beta+\gamma & b+\rho_1-\rho_2-\mu \\ \beta+\rho_1-\rho_2-\mu-\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya determinan $\left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right) = 0$. Misalkan matriks $M_2 = \left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right)$, maka :

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - J(\hat{I},\hat{S})$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b-\beta+\gamma & b+\rho_1-\rho_2-\mu \\ \beta+\rho_1-\rho_2-\mu-\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \lambda-b+\beta-\gamma & -b-\rho_1+\rho_2+\mu \\ -\beta-\rho_1+\rho_2+\mu+\gamma & \lambda \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks di atas, maka akan dicari $\left(\lambda I - Jf(\hat{I},\hat{S})\right) = 0$.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda-b+\beta-\gamma & -b-\rho_1+\rho_2+\mu \\ -\beta-\rho_1+\rho_2+\mu+\gamma & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik matriks Jacobian di atas adalah :

$$(\lambda - b + \beta - \gamma)(\lambda) - (-b - \rho_1 + \rho_2 + \mu)(-\beta - \rho_1 + \rho_2 + \mu + \gamma) = 0$$

$$\lambda^2 + (\beta - b - \gamma)\lambda - (-b - \rho_1 + \rho_2 + \mu)(-\beta - \rho_1 + \rho_2 + \mu + \gamma) = 0$$

Misalkan $P = (\beta - b - \gamma)$ dan $Q = (-b - \rho_1 + \rho_2 + \mu)(-\beta - \rho_1 + \rho_2 + \mu + \gamma)$, maka persamaan karakteristik di atas memiliki akar-akar :

$$\lambda_1 = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

Karena $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ dan $\beta + \rho_1 > +\rho_2 + \mu + \gamma$, maka bagian real pada $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$, sehingga berdasarkan teorema 4.2 titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik, yang berarti bahwa untuk solusi awal yang cukup dekat dengan titik *equilibrium* maka solusi Sistem (4.1) akan selalu berada cukup dengan titik *equilibrium*, dan untuk t menuju tak hingga maka solusi Sistem (4.1) akan sama dengan titik *equilibrium* endemik penyakit. Halini berarti bahwa untuk t menuju tak hingga selalu ada penyakit dalam populasi jika dalam populasi laju kelahiran ditambah laju imigrasi lebih kecil dari laju kematian ditambah laju emigrasi, dan jika laju penularan ditambah laju imigrasi lebih besar dari laju emigrasi ditambah laju kelahiran dan ditambah laju kematian.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Model SIS dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi adalah :

   $$\frac{dS}{dt} = bN + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S - \mu S + \gamma I$$

   $$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \mu I - \gamma I$$

   denga jumlah populasi diasumsikan $S + I = N$, dimana S dan I masing-masing adalah kelas *suspectible* dan kelas *infectives* dalam populasi.
2. Ada dua titik kesetimbangan pada model SIS dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi yaitu :
   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $(I^*, S^*) = (0, \frac{bN}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)})$ dengan syarat $\mu > \rho_1 + \rho_2$.
   b. Titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\beta + \rho_1 - \rho_2 - \mu - \gamma}{\beta} N, \frac{-\rho_1 + \rho_2 + \mu + \gamma}{\beta} N\right)$.
3. Pada model SIS dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi, titik kesetimbangan bebas penyakit $(I^*, S^*) = (0, \frac{bN}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)})$ stabil asimtotik jika $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$, dan $\beta \frac{b}{(\mu - \rho_1 + \rho_2)} < \rho_2 - \rho_1 + \mu + \gamma$ yang berarti pada akhirnya tidak ada penyakit dalam populasi jika laju kelahiran ditambah dengan laju imigrasi lebih kecil dari laju emigrasi ditambah dengan laju kematian, dan juga jika dalam populasi besar laju penularan dikali dengan laju kelahiran dibagi dengan laju kematian dikurangi dengan laju imigrasi serta ditambah dengan laju emigrasi lebih kecil dari laju emigrasi dikurangi dengan laju imigrasi ditambah dengan laju kematian dan ditambah dengan laju kesembuhan.

Sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\mu-\gamma}{\beta} N, \frac{-\rho_1+\rho_2+\mu+\gamma}{\beta} N\right)$ stabil asimtotik jika $b + \rho_1 < \rho_2 + \mu$ dan jika populasi memenuhi kondisi $\beta + \rho_1 > +\rho_2 + \mu + \gamma$ yang berarti bahwa pada akhirnya selalu ada penyakit dalam populasi jika dalam populasi laju kelahiran ditambah laju imigrasi lebih kecil dari laju kematian ditambah laju emigrasi, dan jika laju penularan ditambah laju imigrasi lebih besar dari laju emigrasi ditambah laju kematian dan ditambah laju kesembuhan.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini memodelkan penyebaran penyakit dengan asumsi-asumsi tertentu, dan untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangannya menggunakan metode linearisasi. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini disarankan menggunakan asumsi lain untuk memodelkan penyebaran penyakit dan menggunakan metode lain untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangan.

DAFTAR PUSTAKA

Brauer, F. dan Castillo-Chavez, C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology,* Springer – Verlag, New York. 2000.

Budiantoro, F. Kestabilan Global pada Model Endemik SIR dengan Imigran,*Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Sebelas Maret,* Surakarta. 2009.

Ferawati. Analisis Kestabilan Titik Tetap Pada Model SIS dengan Penambahan Populasi Rentan, Konstan dan penambahan populasi dan Kematian, Sesuai Persamaan Logistik,*Tugas Akhir Mahasiswa Institut Teknologi Bandung,* Bogor. 2004.

Hale, J. K. dan Kocak, H. *Dynamic and Bifurcation,* Springer-verlag, New York. 1991.

Laksana, A. Model Penyebaran Penyakit Melalui Hubungan Seksual (PHS) : Gonorrhea dan HIV/AIDS, *UGM, Yogyakarta*. 2011.

McCormarck, R. K. dan Allen L. J. S. Disease emergence in multi-host epidemic models, Texas Tech University, USA. 2006.

Meiss, J. D. *Differential Dynamical Systems,* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA. 2007.

Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems,* Springer-verlag, New York. 1991.

Supriatna, A. K., dkk. Pembuatan Model Matematika dan Software untuk Penghitungan tingkat vaksinasi pada penyearan penyakit menular, *UNPAD, Bandung.* 2005.

Tamrin, H. dan Riyanto, M.Z. Model SIR Penyakit Tidak Fatal, *UGM, Yogyakarta*. 2007.

Widodo. *Pengantar Model Matematika*, FMIPA UGM, Yogyakarta. 2007.